Metody Počítačového Vidění (MPV) - 3D počítačové vidění

Projektivní geometrie

Ing. Zdeněk Krňoul, Ph.D.

Katedra Kybernetiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

DEPARTMENT OF
CYBERNETICS

Obsah přednášky

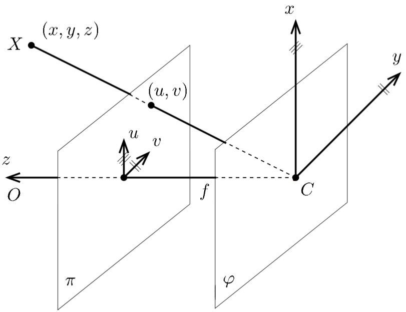
- **Projektivn geometrie**
  - projektivní prostor
  - projektivita
  - projektivní transformace
  - zajímavé vlastnosti projektivní geometrie

DEPARTMENT OF
CYBERNETICS

Projektivní geometrie

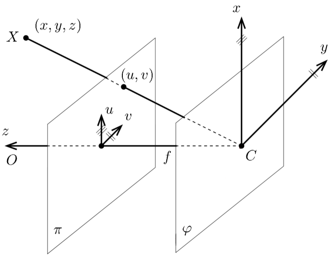
Úvod do projektivní geometrie, reprezentace a zápis

- bod ve 2D prostoru budeme značit **x** *2* R^2
- bod ve 3D prostoru budeme značit **X**
- přímka ve 2D prostoru *n*
- přímka ve 3D prostoru *O*
- rovina ve 3D prostoru , ′



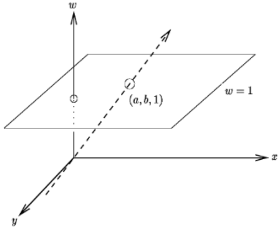
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Projektivní geometrie



Vektorové reprezentace pak budou následující:
bod v rovině $\mathbf{x} = [u; v]^T$, nebo $\mathbf{x} = [x; y]^T$,
bod v prostoru $\mathbf{X} = [x_1; x_2; x_3]^T$ nebo $\mathbf{X} = [x; y; z]^T$,
přímka $\mathbf{n} = [a; b; c]^T$
Geometrické entity budeme uvažovat jako sloupcový vektor, násobení matice tímto sloupcovým vektorem zprava má výsledek opět sloupcový vektor.

Homogenní reprezentace



- bod v rovině (R^2) je reprezentovaný vektorem o velikosti 3 přidáním třetí souřadnice w (**homogenn souradnice**) a vzniká vektor v (R^3)
- pro $w = 1$ $[a; b; 1]^T$ i všechny body $[x_1; x_2; x_3]^T$ vzniklé jako $k[a; b; 1]^T$ v P^2 reprezentují stejný původní bod v nehomogenních souřadnicích v R^2
- $[a; b]^T$ zpět získáme ho jako $[x_1{=}x_3; x_2{=}x_3]^T$.

Pozn. pro vyss dimenze plat take, napr. pro R^3 *a* $w{=}1$ $[x; y; z; 1]^T$

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Projektivní prostor P^2

- přímka v rovině je reprezentována obecnou rovnicí přímky: $ax + by + c = 0$
- změna parametrů a, b a c nám určuje odlišnou přímku ... přirozeně pak přímka může být vyjádřena vektorem $\mathbf{n} = [a; b; c]^T$
- dále víme, že bod v rovině $\mathbf{x} = [x; y]^T$ (R^2) leží na přímce $\mathbf{n} = [a; b; c]^T$, $ax + by + c = 0$
- podmínka lze zapsat jako skalární součin $[x; y; 1][a; b; c]^T = 0$
- pozorujeme, že pro k, kdy $[kx; ky; k]$ je zmíněná podmínka také splněna , $[x; y; 1][a; b; c]^T = 0$

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Projektivní prostor P^2

- podobně vztah **pr mka \$ vektor** ... rovnice přímky $ax + by + c = 0$ a $(ka)x + (kb)y + (kc) = 0$ jsou stejné ! ale odlišný vektor
- tento vztah ekvivalence je známí jako **homogenn vektor**

Definice

- všechny vektory lišící se pouze v měřítku představují jednu třídu prvků
- množina všech těchto tříd prvků v R^3 $[0; 0; 0]^T$ tvoří **projektivn prostor** P^2
- vektor $[0; 0; 0]^T$ nekoresponduje žádné přímce a je z prostoru vyjmut

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Přímka a bod

- průsečík dvou přímek $\mathbf{n}$ a $\mathbf{n}'$ je dán vektorovým součinem:
  $\mathbf{n} \quad \mathbf{n}'$
- bod $\mathbf{x} = [x_1; x_2; 0]^T$ patří do P^2
- jeho nehomogenní souřadnice v R^2 tedy $[x_1{=}0; x_2{=}0]^T$! bod, který v rovině má nekonečné souřadnice ... bodu říkáme *Ideal Point* - bod v nekonečnu
- takovýto bod je vlastně průsečíkem dvou rovnoběžných přímek
- všechny body v nekonečnu leží na jedné "přímce v nekonečnu"$[0; 0; 1]^T$

Podobné odvození nalezneme pro zápis průsečíků dvou přímek, nebo pro získání přímky spojením dvou bodů.

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Shrnutí

- bod $\mathbf{x}$ leží na přímce $\mathbf{l}$ pokud $\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{l} = \mathbf{0}$
- průsečík $\mathbf{m}$ dvou přímek $\mathbf{n}$ a $\mathbf{n}'$ (i rovnoběžných) je dán vektorovým součinem: $\mathbf{m} = \mathbf{n} \quad \mathbf{n}'$ (rovnoběžné přímky mají průsečík bod v nekonečnu)
- přímka $\mathbf{n}$ spojující dva body m a m' je analogicky: $n = m \quad m'$

Pozn.

Zaveden projektivn ho prostoru je urcen nejakeho popisu pro perspektivu

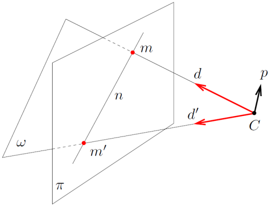
Geometricke objekty jako je bod, pr mka a rovina jsou zapisovany vektorove

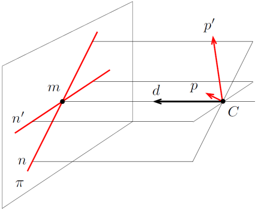
Potom vztahy mezi temito objekty je mozne zapisovat jednoduseji nez kdyby se zapisovaly v nehomogenn ch souradnic ch

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Model pro projektivní rovinu a princip duality

- body v P^2 jsou paprsky v R^3 … množina všech vektorů $\mathbf{x} = k[x_1; x_2; x_3]^T$ s měnícím se k formuje paprsek, který směřuje ze středu promítání
- analogicky přímka v prostoru P^2 odpovídá rovině v R^3 procházející středem projekce
- obdobně dva odlišné paprsky určují zmíněnou rovinu stejně jako dva odlišné body určují R^2 přímku
- obráceně … dvě přímky mají společný bod - průsečík a tedy dvě roviny mají společný průsečík … paprsek





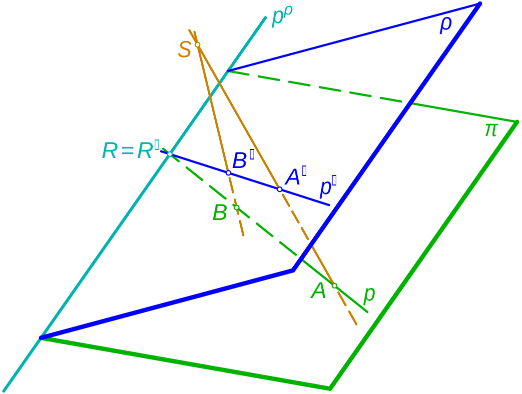
DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Obsah přednášky

- Projektivní geometrie
  - projektivní prostor
  - **projektivita**
  - projektivní transformace
  - zajímavé vlastnosti projektivní geometrie

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

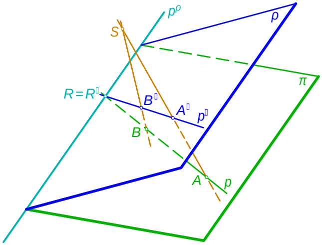
Projektivita



Poznamka: je projektivn zobrazen roviny do roviny

- body ležící na společné přímce jsou transformovány na přímku

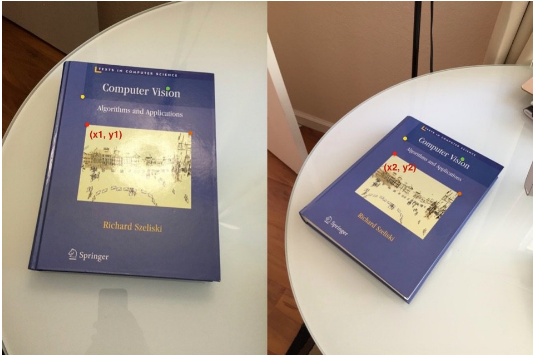
DEPARTMENT OF CYBERNETICS



Definice

Projektivita je invertibilní mapování h bodů v P^2 (tedy homogenních 3 1 vektorů) do **sameho** prostoru P^2 , tři body x_1, x_2 a x_3 ležící na společné přímce jsou mapovány na body $h(x_1)$, $h(x_2)$ a $h(x_3)$, které leží také na **spolecne pr mce**.

Poznamka. Projektivita je take nekdy nazyvana kolineace, projektivn transformace, nebo homogra e. Tyto oznacen jsou synonyma.



Důsledek

Mapování $h : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ je projektivita pouze a jen, existuje-li nesingulární matice $\mathbf{H}$, 3×3, $(det(\mathbf{H}) \neq 0)$, pro kterou platí, že nějaký bod v $\mathbb{P}^2$ reprezentovaný vektorem $\mathbf{x}$ lze transformovat jako $h(\mathbf{x}) = \mathbf{H}\mathbf{x}$ (*projektivn transformace*).

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Zápis projektivní transformace

- projektivní transformace je dána jako:

$$
\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1}
$$

- je to lineární transformace homogenního vektoru nesingulární 3×3 maticí $\mathbf{H}$
- matice $\mathbf{H}$ má 8 stupňů volnosti $\rightarrow$ poměrům dvojic 9 prvků matice
- násobení matice konstantou k nemění definovanou transformaci a konstanta představuje pouze měřítko
- $\mathbf{H}$ je jednoznačně určena čtveřicí sobě korespondujících bodů nebo přímek v obecné pozici

Shrnutí

- kolineární body (body ležící na společné přímce) jsou opět transformovány na kolineární body
- několik různoběžných přímek se společným průsečíkem jsou transformovány opět na různoběžné přímky s jedním společným průsečíkem
- pořadí kolineárních bodů je zachováno (viz později)
- bod $\mathbf{x}$ je transformován na bod $\mathbf{x}'$ tak, že: $\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$
- přímka $\mathbf{l}$ je transformován na přímku $\mathbf{l}'$ tak, že: $\mathbf{l}' = H^{-T}\mathbf{l}$

Pr kladem takoveho transformace por zen stejne sceny ruznym fotoaparatem, nebo pribl zen (ZOOM), nebo pootocen kamery (ve stredu projekce, viz dale), nebo vse najednou.

Určení 2D projektivní transformace


- 2D homografie je dána množinou bodů $\mathbf{x}_i$ v prostoru $\mathbb{P}^2$ a množinou korespondujících bodů ve stejném $\mathbb{P}^2$
- nalezení takovéto transformace z $\mathbf{x}_i \leftrightarrow \mathbf{x}'_i$ znamená určit matici $\mathbf{H}$ tak, že platí $\mathbf{H}\mathbf{x_i} = \mathbf{x'_i}$ pro každé i.
- minimální počet potřebných bodů $\leftrightarrow$ počtu stupňů volnosti hledané transformace ... obecná projektivní transformace ... 3×3 matice (9 prvků) ale 8 stupňů volnosti
- 1 bod má dva stupně volnosti, tedy souřadnice $(x; y) \rightarrow$ čtyři body a korespondenty

- $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{Hx}_i$ nejsou stejné vektory, ale mají stejný směr a liší se pouze velikostí, viz obrázek
- pro jeden bod (korespondující pár) vztah $\mathbf{Hx_i} = \mathbf{x'_i}$ určuje soustavu 3 lineárních rovnic (s pravou stranou) (řešení přes Cramerovo pravidlo)
- pak můžeme přepsat jako vektorový součin $\mathbf{x'_i} \times \mathbf{Hx_i} = \mathbf{0}$ a pak:

$$\mathbf{x'_i} \times \mathbf{Hx_i} = \begin{pmatrix} y'_i \mathbf{h}^{3T}\mathbf{x_i} - w'_i \mathbf{h}^{2T}\mathbf{x_i} \\ w'_i \mathbf{h}^{1T}\mathbf{x_i} - x'_i \mathbf{h}^{3T}\mathbf{x_i} \\ x'_i \mathbf{h}^{2T}\mathbf{x_i} - y'_i \mathbf{h}^{1T}\mathbf{x_i} \end{pmatrix} \tag{2}$$

- $\mathbf{h}^{1T}$ je vektor odpovídající prvnímu řádku matice $\mathbf{H}$
- transformovaný bod (tedy $\mathbf{x}'_i$) je v homogenních souřadnicích značen $\mathbf{x}'_i = (x'_i; y'_i; w'_i)$

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic pak přepisem získáme jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i'\mathbf{x}_i^T & y_i'\mathbf{x}_i^T \\ w_i'\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i'\mathbf{x}_i^T \\ -y_i'\mathbf{x}_i^T & x_i'\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{3}$$

- pro bod i označíme soustavu jako $\mathbf{A}_i\mathbf{h} = \mathbf{0}$, kde vektor $\mathbf{h}$ je sloupcový vektor 9×1 složený ze třech řádků matice $\mathbf{H}$
- ze 3 rovnic jsou jen dvě lineárně nezávislé; 3. rovnice je pře-násobený součet první a druhé rovnice $\Rightarrow$ 3. řádek lze vypustit:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i'\mathbf{x}_i^T & y_i'\mathbf{x}_i^T \\ w_i'\mathbf{x}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i'\mathbf{x}_i^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4}$$

- třetí homogenní souřadnice promítnutého bodu (w'_i) může být zvolena $w'_i = 1$ jsou měřeny v obraze, jiná volba je také možná
- řešíme soustavu rovnic $\mathbf{A}\mathbf{h} = \mathbf{0}$ v případě pro 4 body kdy je $rank(\mathbf{A}) = 8$, pak existuje jedno řešení odpovídající pravému nulovému prostoru
- měřítko může být zvoleno tak aby $\|\mathbf{h}\| = 1$
- často volíme více bodů ($n > 4$) a matice $\mathbf{A}$ má pak příslušný rozměr $2n \times 9$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & w'_1\mathbf{x}_1^T & y'_1\mathbf{x}_1^T \\ w'_1\mathbf{x}_1^T & \mathbf{0}^T & x'_1\mathbf{x}_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & w'_n\mathbf{x}_n^T & y'_n\mathbf{x}_n^T \\ w'_n\mathbf{x}_n^T & \mathbf{0}^T & x'_n\mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^1 \\ \mathbf{h}^2 \\ \mathbf{h}^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \qquad (5)$$

- v praxi měření obsahují chybu (šum) a tak získaná soustava je pře-určená, tedy neexistuje řešení $rank(\mathbf{A}) > 8$
- pak hledáme takové řešení, které minimalizuje chybu $||\mathbf{Ah}||$
- pro tento účel použijeme SVD rozklad (singular value decomposition)
- pak $\mathbf{A} = \mathbf{UDV^T}$ a hledané řešení $\mathbf{h}$ je poslední sloupec matice $\mathbf{V}$ odpovídající nejmenšímu vlastnímu číslu (pravý nulový prostor matice $\mathbf{A}$)

Obsah přednášky

- I Projektivní geometrie
    - I projektivní prostor
    - I projektivita
    - I projektivní transformace
    - I **zaj mave vlastnosti projektivn geometrie**

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

Vlastnosti projektivní geometrie

- Nevlastní bod (vanishing point - úběžník)
- nevlastní body lze nalézt v běžném životě, např. dlouhé rovné koleje se v oku (obrázku) sbíhají
- koleje jsou rovnoběžné, v 3D prostoru se protnout nemohou
- projektivní transformace však v obraze tyto dvě přímky zdánlivě přibližuje
- tento zdánlivý průsečík je obrazem *nevlastn ch bodu* těchto přímek

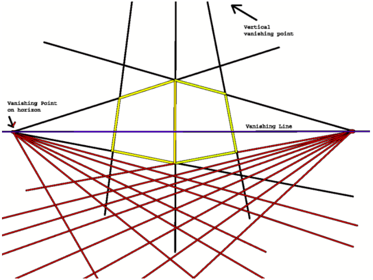
Definice

Nevlastní bod je limit projekce nějakého body, který se pohybuje po libovolné prostorové přímce do nekonečna.

- ukázka projekce dvou rovnoběžných prostorových přímek a jejich průsečík
- je možné pouze z informací z obrázku určit počet pražců odspodu obrázku až ke vlaku?
- jak určit vzdálenost vlaku pokud víme, že vzdálenost pražců je 0,806 m?

Nevlastní přímka, (vanishing line - úběžnice)

- nevlastní přímka je přímka v obraze tzv. průsečnice dvou (všech) **rovnobeznych** prostorových rovin
- nebo jako pozice všech nevlastních bodů všech přímek ležící v jedné prostorové rovině
- např. **horizont** ... pohled na otevřené moře ... rovnoběžné prostorové přímky běžící po hladině se na horizontu protínají

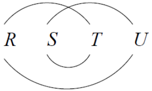


- pak tyto průsečíky jsou obrazy nevlastních bodů a horizont obraz nevlastní přímky

Dvojpoměr (cross ratio)

- dvojpoměr je číslo, které charakterizuje poměr délek úseků mezi čtyřmi kolineárními body (body na jedné prostorové přímce)
- tyto čtyři kolineární prostorové body R,S,T a U definují dvojpoměr jako:

$$[RSTU] = \frac{|RT|}{|RU|}\frac{|SU|}{|ST|} \qquad (6)$$



DEPARTMENT OF CYBERNETICS

- dvojpoměr je invariantní kolineaci
- dvojpoměr je invariantní perspektivní transformaci

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

1D projektivní souřadnice

- mějme nějaké čtyři (tři) body náležící prostorové přímce
- jsou promítnuty do obrazové roviny nějaké kamery (kolineace)
- pak v této kameře platí stejný dvojpoměr, jako v původní přímce
- předpokládejme, že poslední (čtvrtý) bod je úběžník, který v obraze má konečnou souřadnici
- tento fakt nám umožňuje měřit o obraze **bez dals ch znalost** projektivní transformace

$$[P] = [P_\infty P_0 P_I P] = \frac{|P_\infty P_I|}{|P_0 P_I|} \frac{|P_0 P|}{|P_\infty P|} \tag{7}$$

- P_0 - je počátek zvoleného souřadného systému $[P_0] = 0$
- P - **pracovní bod**, jeho souřadnici v prostoru chceme určit
- P_I - je bod určující měřítko, můžeme zvolit $[P_I] = 1$ nebo z velikosti známého objektu (umístěný v daném směru osy).
- P_∞ - pomocný bod (nevlastní bod dané prostorové přímky - osy) $[P_\infty] = \infty$

DEPARTMENT OF CYBERNETICS

$$[P] = [P_1 P_0 P_I P] = \frac{jP_1 P_I j}{jP_0 P_I j} \frac{jP_0 P j}{jP_1 P j} \tag{8}$$

DEPARTMENT OF
CYBERNETICS

2D projektivní souřadnice

- rozšířením můžeme zavést měření ve dvou na sebe kolmých osách (2D Euklidovský prostor)
- umožňuje nám měřit podél prostorové roviny (např. podlaha) za pomoci její projekce do obrazu bez další znalostí (kalibrace kamery aj.)

- souřadnice (x,y) libovolného bodu této prostorové roviny se analogicky určí jako:
  $[P_x] = [P_{x\,1}\, P_0 P_{xl} P_x]$
  $[P_y] = [P_{y\,1}\, P_0 P_{yl} P_y]$

I